# Wozu man Integrale braucht

a. o. Univ. Prof. Dr. Rudolf Taschner
Technische Universität Wien

20. April 2001

Der zentrale Begriff des Mathematikunterrichts in der letzten Klasse der allgemeinbildenden höheren Schulen ist das Integral. Die Einführung des unbestimmten Integrals als Umkehroperation des Differenzierens und des bestimmten Integrals als Flächeninhalt sowie deren Zusammenhang, den der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formuliert, liegen auf der Hand und werden seit mehreren Jahrzehnten an Schulen im wesentlichen lege artis durchgeführt. Dann jedoch erhebt sich die Frage, welche sinnvollen Rechnungen mit diesem so gewonnenen Begriff zu unternehmen seien.

Wenig empfehlenswert — obwohl aus der Sicht der wissenschaftlichen Mathematik außerordentlich reizvoll — ist die *Erforschung der Anwendbarkeitsgrenzen* des Integrals: Welche Funktionen sind integrierbar und welche nicht, welche Flächen besitzen Inhalte und welche Körper Volumina? All dies führt zu außerordentlich heiklen erkenntnistheoretischen Problemen, für die vom Gros der Schülerinnen und Schüler weder genügend Begeisterungsfähigkeit zu erwarten noch ausreichend Zeit vorhanden sind. Allenfalls höchst Begabte und Interessierte kann man mit solchen Fragen belasten.

Überdies ist zu bedenken, daß die von der formalen Mathematik üblicherweise angebotenen Lösungen keineswegs der Weisheit letzten Schluß bilden. Ganz im Gegenteil: Bizarre Folgerungen wie das nach Banach und Tarski benannte Paradoxon, wonach *eine* Kugel in endlich viele Teile zerlegt und diese Teile in *zwei gleich große* Kugeln zusammengesetzt werden können, machen deutlich, daß der sich nach außen mit so vollkommen scheinendem Glanz präsentierenden formalen Mathematik ein gerüttelt Maß an sinnwidriger Esoterik anhaftet.

Von Bedeutung sind sicher die Anwendungen des Integrals bei der Berechnung der Volumina und Oberflächeninhalten von Drehkörpern. Es ist zum Beispiel lehrreich, daß die bereits aus der Unterstufe bekannten Formeln für Rauminhalt und Oberflächeninhalt der Kugel eben mit dieser Methode — und im wesentlichen *nur* mit dieser Methode — erhalten werden. Allerdings sollte man überlegen, ob man diesen Beispielen in der Schule nicht eine möglicherweise übertriebene Bedeutung einräumt: Drehkörper, bei denen aus einem Ellipsoid ein Paraboloid oder ein Kegel herausgeschnitten wurden, sind nicht gerade alltäglich. Ab einem gewissen Maß greift der Verweis auf die Anwendbarkeit nicht mehr, und die Aufgaben beginnen, nur mehr sich selbst zu genügen.

Gestützt wird diese Bemerkung durch die Tatsache, daß die Volumsberechnungen von Drehkörpern vor allem deshalb so beliebt sind, weil die in ihnen vorkommenden Integrale weitaus einfacher zu berechnen sind als bei der Ermittlung von Flächeninhalten. Wenn zum Beispiel nach dem Volumen jener Schale gefragt wird, welche bei Schnitt der durch $9y^2-4x^2=36$ gegebenen Hyperbel in der oberen Halbebene mit der durch $y=6$ gegebenen Geraden nach Drehung um die $y$-Achse entsteht, hat man wegen $y=2$ als Ordinatenwert des Hyperbelscheitels $S=(0\mid 2)$ und

$y = 6$ als Ordinatenwert der beiden Schnittpunkte $S_1 = \left(-6\sqrt{2} \mid 6\right)$, $S_2 = \left(6\sqrt{2} \mid 6\right)$ bloß das Integral

$$\pi \int_2^6 x^2 \mathrm{d}y = \frac{9\pi}{4} \int_2^6 \left(y^2 - 4\right) \mathrm{d}y = 120\pi$$

zu berechnen. Der Flächeninhalt des Schalenquerschnitts hingegen ist entweder das Integral

$$2 \int_2^6 x \mathrm{d}y = 3 \int_2^6 \sqrt{y^2 - 4} \mathrm{d}y = 36\sqrt{2} - 6 \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

beziehungsweise das vom Rechteck mit $12\sqrt{2}$ als Breite und 6 als Höhe subtrahierte Integral

$$\int_{-6\sqrt{2}}^{6\sqrt{2}} y \mathrm{d}x = \frac{2}{3} \int_{-6\sqrt{2}}^{6\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 9} \mathrm{d}x = 36\sqrt{2} + 6 \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

mit dem Ergebnis

$$6 \cdot 12\sqrt{2} - \left(36\sqrt{2} + 6 \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right) = 36\sqrt{2} - 6 \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

(was natürlich auf den gleichen Wert hinausläuft). Beide Integrale entpuppen sich offenkundig keineswegs als so simpel wie das zuvor angeschriebene Volumsintegral. Wie man sieht: weniger die vordergründig gepriesenen anwendungsbezogenen Aspekte, sondern der naive (und zugleich sympathische) Versuch, den Schülerinnen und Schülern das Integrieren nicht allzu schwer zu machen, sind für die reiche Beispielfülle von Volumsintegralen maßgeblich ...

Warum, so könnte man im Anschluß daran fragen, wird nicht die *Technik des Integrierens* gründlicher studiert? Denn dann wären auch viele komplizierte Flächen einer Inhaltsberechnung zugänglich. Aber sollte man Maturantinnen und Maturanten wirklich die Ermittlung eines harmlos scheinenden Integrals wie zum Beispiel des Integrals

$$\int \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta}$$

ohne weiteres zumuten? Studieren wir seine Auswertung: Zunächst sollte man — das ist ein scheinbar aus der Luft gegriffener Trick — wissen, daß es günstig ist, den Komplementärwinkel $\vartheta = \pi/2 - \beta$ zu substitutieren:

$$\int \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta} = -\int \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sin\vartheta} \; .$$

Danach empfiehlt sich die Substitution $t = \tan(\vartheta/2)$ — ein weiterer, scheinbar aus dem Blau des Himmels herabgefallener Trick. Denn es sind

$$\sin\vartheta = \sin 2\frac{\vartheta}{2} = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} = 2\tan\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{2\tan\frac{\vartheta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\vartheta}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

und

$$\mathrm{d}t = \left(1 + \tan^2\frac{\vartheta}{2}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2} \mathrm{d}\vartheta$$

folglich

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{t} \; .$$

Daher lautet

$$\int \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta} = -\int \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sin\vartheta} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln t + C = -\ln\tan\frac{\vartheta}{2} + C = \ln\frac{1}{\tan\frac{\vartheta}{2}} + C.$$

Weil schließlich $1/\tan\alpha = \cot\alpha = \tan(\pi/2-\alpha)$ ist und $\pi/2-\vartheta/2 = \beta/2+\pi/4$ zutrifft, gewinnt man (für kleine Winkel $\beta$, um einen positiven und endlichen Tangens garantieren zu können, genauer: für Winkel $\beta$ mit $-\pi/2 < \beta < \pi/2$) das endgültige Ergebnis

$$\int \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta} = \ln\tan\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C\,.$$

Ist eine derartige Rechnung in der Schule wirklich zumutbar? Und wenn ja — zu welchem Zweck?

Mit der Entwicklung von computerunterstützten Rechenprogrammen glauben manche, die Technik des Integrierens „den Maschinen überlassen" zu können: sie sei für menschliches Rechnen obsolet geworden. Man tippt einfach

$$\int \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta}$$

ein, betätigt die „Evaluate"-Taste und erhält das Ergebnis $\ln(\sec\beta+\tan\beta)$. Allerdings werden nur die wenigsten damit etwas anzufangen verstehen, denn kaum jemand kennt in Kontinentaleuropa die Secans-Funktion. Aber selbst wenn das Resultat als $\ln((1/\cos\beta)+\tan\beta)$ mitgeteilt worden wäre, würde kaum eine Schülerin oder ein Schüler damit etwas Sinnvolles zu verbinden wissen, geschweige denn erkennen, daß es mit $\ln\tan((\beta/2)+(\pi/4))$ übereinstimmt. Auch das Tippen von Tasten ist mit Tausenden Tücken gespickt ...

All die bisherigen Bemerkungen lassen zunehmend an der Sinnhaftigkeit des Lehrstoffs „Integralrechnung" in der Schule zweifeln.

Anhand von zwei Beispielen sei — gleichsam zum Trost für die verwirrten Lehrerinnen und Lehrer — gezeigt, daß es für das Integral in der Schule noch immer ein weites Feld sinnvoller Anwendungen gibt, man trotz der obigen Entmutigungen keineswegs die Flinte ins Korn werfen muß. Das erste Beispiel kann, wenn man ein wenig hochtrabend zu sprechen wagt, als Aufgabe aus dem Bereich der *Statistik* bezeichnet werden. Das zweite Beispiel zählt eher zur *Geographie* als zur Mathematik und kommt auf höchst eigenartige Weise wieder zum Thema der Technik des Integrierens zurück.

Das *erste Beispiel* lautet:

Die Tabelle

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 | 7,5 | 8,5 | 9,5 |
| $y$ | 0,9 | 3,1 | 4,5 | 5,6 | 5,4 | 4,5 | 3,6 | 2,4 | 1,4 | 0,6 |

beschreibt grob die Verteilung des monatlichen Einkommens auf die unselbständig Erwerbstätigen eines fiktiven europäischen Staates. Dabei benennt $y = y(x)$ die (jeweils auf zehntausend Personen bezogene) Zahl derjenigen Erwerbstätigen, deren Monatseinkommen mindestens $(x-0,5)$ Tausend Euro, aber weniger als $(x+0,5)$ Tausend Euro beträgt.

a) Es ist in einer Skizze zu bestätigen, daß der von $(0 \mid 0)$ über $(2 \mid 4)$, $(4 \mid 6)$ zu $(10 \mid 0)$ führende Streckenzug diese Verteilung sehr gut beschreibt. Es ist insbesondere jene Funktion $f$ darzustellen, für die $y = f(x)$ diesen Streckenzug wiedergibt.

b) Mit $r$ werde jenes Monatseinkommen bezeichnet, ab dem man als „reich" gilt. In Abhängigkeit von $r$ ist der Prozentsatz $p = p(r)$ der „Besserverdienenden"

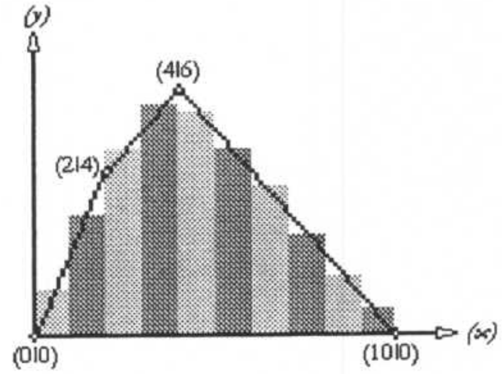


Abbildung 1: Histogramm und Schaubild von $y = f(x)$

im Vergleich zur Gesamtheit aller Erwerbstätigen zu vergleichen, wobei die „Besserverdienenden" ein monatliches Gehalt $x \geq r$ beziehen. Es ist insbesondere $p(r)$ für die ganzzahligen Werte zwischen $r = 4$ und $r = 10$ zu ermitteln und in einer Kurve zu studieren. Welche Folgerungen ergeben sich aus dieser Abhängigkeit für die Gestaltung des staatlichen Haushalts?

Die *Lösung* des Beispiels beinhaltet in b) ein Integral, das wegen der einfachen Gestalt der vorgelegten Funktion nicht einmal mit irgendwelchen Techniken der achten Klasse ausgerechnet werden muß, sondern bloß als *gedankliche Stütze* anzusehen ist: die Rechenmethode stimmt für beliebige (auch für komplizierte, nur mit elektronischen Hilfsmitteln analysierbare) Verteilungsfunktionen. Doch zunächst soll die Lösung der Reihe nach erarbeitet werden:

a) Es gilt:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ x+2 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 10-x & \text{für } 4 \leq x \leq 10\,. \end{cases}$$

Vergleicht man die Tabelle

| $x$ | 0,5 | 1,5 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 | 7,5 | 8,5 | 9,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1,0 | 3,0 | 4,5 | 5,5 | 5,5 | 4,5 | 3,5 | 2,5 | 1,5 | 0,5 |

mit der Tabelle der Angabe, erkennt man die gute Näherung dieser Funktion an die vorgegebene Verteilung.

b) Es errechnet sich

$$\int_0^{10} y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2x\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (x+2)\,\mathrm{d}x + \int_4^{10} (10-x)\,\mathrm{d}x = 32$$

(was man natürlich auch *ohne Integrationstechnik* erkennt) und daher

$$\begin{aligned} p &= p(r) = \frac{1}{32}\int_r^{10} (10-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{25}{16} - \frac{5}{16}r + \frac{1}{64}r^2 = \frac{1}{64}\left(r^2 - 20r + 100\right) \\ &= \left(\frac{10-r}{8}\right)^2 \end{aligned}$$

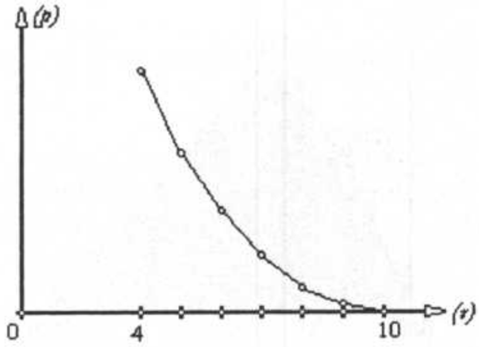


Abbildung 2: Schaubild von $p = p\,(r)$

(was man ebenfalls auch *ohne Integrationstechnik* erkennt). Hieraus gewinnt man zusammen mit der Berechnung

$$\mathrm{d}p = 2\left(\frac{10-r}{8}\right)\frac{-\mathrm{d}r}{8} = \frac{-1}{32}\,(10-r)\,\mathrm{d}r$$

des Anstiegs

$$k = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{r-10}{32}$$

die Wertetabelle

| $r$ | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 56% | 39% | 25% | 14% | 6% | 2% | 0% |
| $k$ | $\frac{-3}{16}$ | $\frac{-5}{32}$ | $\frac{-1}{8}$ | $\frac{-3}{32}$ | $\frac{-1}{16}$ | $\frac{-1}{32}$ | 0 |

Dies erlaubt eine sehr präzise graphische Darstellung der Abhängigkeit $p = p\,(r)$.

(Die Anstiegsberechnung ist für die Skizze bei einer derart einfach gestalteten Abhängigkeit $p = p\,(r)$ — es handelt sich geometrisch um einen Parabelbogen — natürlich nicht erforderlich.)

Die praktische Bedeutung der Abhängigkeit $p = p\,(r)$ für das staatliche Budget beruht vor allem in der Festlegung von Progressionsstufen bei der Besteuerung: Die Steuerprogression wirkt umso besser, je *kleiner* die Einkommensgrenze $r$ als Grenzeinkommen der „Besserverdienenden" festgelegt wird, wobei *im Falle einer kleinen* Einkommensgrenze $r$ *geringfügige* Änderungen der Wertes von $r$ *spürbare* Änderungen von $p\,(r)$ bewirken, somit bei den Steuereinnahmen des Staates massive Gewinne (bei einer Senkung von $r$) bzw. Verluste (bei einer Erhöhung von $r$) hervorrufen. Die zuweilen populistisch geforderte hohe Besteuerung von wirklich überdurchschnittlich gut verdienenden Einkommensbeziehern (zum Beispiel mit einem Einkommen $x \geq \mu + 2\sigma \approx 4,5 + 4,2 = 8,7$ Tausend Euro im Monat) liefert für den Staat wegen des kleinen Wertes $p|_{r=8,7} \approx 2,6\%$ kaum gewinnbringende Effekte (wenn man überdies bedenkt, daß die überdurchschnittlich gut verdienenden Einkommensbezieher bei einer für sie schmerzhaften Steuerprogression im allgemeinen besonders geschickt diese mit steuerlichen „Schlupflöchern" zu umgehen verstehen).

Es ist klar, welches allgemeine Prinzip diesem Beispiel zugrunde liegt:

Ist ein Histogramm mit einer Verteilungsformel $y = f\,(x)$ gegeben, in dem das Merkmal $x$ das Intervall $[a; b]$ durchläuft, nennt für jedes Teilintervall $[p; q]$ das

Verhältnis

$$V = \frac{\int_p^q y\mathrm{d}x}{\int_a^b y\mathrm{d}x}$$

den Prozentsatz der gemessenen Population, deren Merkmal $x$ dem Teilintervall $[p; q]$ angehört.

Auf diesem Prinzip beruhen eine ganze Reihe gleichartiger Beispiele: die für Anwendungen sehr bedeutende Ermittlung der Abhängigkeit der Pensionistenquote, also des Verhältnisses von Pensionsbeziehern zu Erwerbstätigen, vom Pensionseintrittsalter oder die Berechnung des Medians als eines von vielen möglichen Durchschnittswerten einer Verteilung seien nur als zwei von vielen genannt[1]. Worauf es bei Beispielen wie diesen — ganz abgesehen von ihrem unmittelbar einsichtigen Anwendungscharakter — im besonderen ankommt, ist die Funktion des Integrals: es steht nicht als algorithmisches Verfahren sondern als *Niederschrift einer Idee* im Zentrum der Überlegung.

Das *zweite Beispiel* lautet:

Wie ist der Kartenentwurf des Globus auf einen, die Erdkugel am Äquator berührenden Kreiszylinder gestaltet, damit die für die Seefahrt eminent bedeutende *Winkeltreue* garantiert wird?

Wir nehmen dabei der Einfachheit halber an, die Erdkugel besitze den Radius 1, d.h. Längen werden in Vielfachen des Erdradius (von 6371 Kilometern) angegeben. Wenn sich der Mittelpunkt der Erde im Ursprung $O$ eines $x$-$y$-$z$-Koordinatensystems befindet und die $z$-Achse durch Nord- und Südpol verläuft sowie die $x$-Achse den Nullmeridian von Greenwich am Äquator im Einheitspunkt $E$ schneidet, kann man jeden Punkt $X$ der Erde durch seine geographische Länge $\lambda$ und seine geographische Breite $\beta$ kennzeichnen: schneidet man den Meridian, also den von Nord- zu Südpol reichenden Halbkreis, auf dem $X$ liegt, mit dem Äquator in $X_0$, gilt

$$\lambda = \sphericalangle EOX_0 \qquad \text{und} \qquad \beta = \sphericalangle X_0OX \; .$$

Wenn wir $X = \{\lambda \mid \beta\}$ schreiben, beziehen wir uns auf jenen Kugelpunkt $X$ mit $\lambda$ als geographischer Länge und $\beta$ als geographischer Breite.

Nun denken wir uns den Globus mit einem Drehzylinder ummantelt, der die Erdkugel entlang des Äquators berührt. Diesen Zylinder kann man entlang einer Erzeugenden aufschlitzen und zu einem Rechteck abrollen, sodaß ein unmittelbarer Zusammenhang mit dem Rechteck — also der ebenen Erdkarte — und dem Zylinder vorliegt. Im Rechteck denken wir uns ein cartesisches $u$-$v$-Koordinatensystem so eingetragen, daß die $u$-Achse am Zylinder mit dem Kugeläquator übereinstimmt, der Schnittpunkt $E$ mit dem Nullmeridian der Ursprung ist und die $v$-Achse zur $z$-Achse gleichsinnig parallel ist.

Bei einer *Zylinderprojektion* bildet man den Globus auf den Zylinder dadurch ab, daß man für die im Bogenmaß gemessenen Winkel $u = \lambda$ und $v = f(\beta)$ setzt[2]. Die Festlegung $u = \lambda$ ist klar, denn der Kugeläquator und die $u$-Achse stimmen überein. Die Festlegung $v = f(\beta)$ besagt, daß die Kugelmeridiane auf dem Zylinder die Erzeugenden (d.h. parallel zur $v$-Achse) sind. Es kommt nun nur mehr darauf an, die Funktion $f$ „richtig" zu wählen.

---

[1] Im Werk „Mathematik 4. Übungs- und Lehrbuch für die 8. Klasse AHS. R. Oldenbourg Verlag, Wien, 2001" des Verfassers findet man genügend reichhaltiges Aufgabenmaterial.

[2] Im oben genannten Buch findet man aussagekräftige Zeichnungen zu diesen Überlegungen sowie weiteres Aufgabenmaterial über Kartenprojektionen.

Wenn man die drei Kugelpunkte[3]

$$X = \{\lambda \mid \beta\}, \qquad Y = \{\lambda + \mathrm{d}\lambda \mid \beta\}, \qquad Z = \{\lambda + \mathrm{d}\lambda \mid \beta + \mathrm{d}\beta\}$$

betrachtet, bilden sie ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in $Y$, mit $\cos\beta \cdot \mathrm{d}\lambda$ als waagrechter und mit $\mathrm{d}\beta$ als senkrechter Kathete. (Die Länge der ersten Kathete ergibt sich aus der Tatsache, daß der Breitenkreis durch $X$ um den Faktor $\cos\beta$ im Vergleich zum Äquator verkürzt ist.) Die entsprechenden Bildpunkte auf dem Zylinder heißen

$$U = (u \mid v)\,, \qquad V = (u + \mathrm{d}u \mid v)\,, \qquad W = (u + \mathrm{d}u \mid v + \mathrm{d}v)\,.$$

Sie bilden ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in $V$, mit $\mathrm{d}u = \mathrm{d}\lambda$ als waagrechter und mit $\mathrm{d}v$ als senkrechter Kathete.

Forderte man statt Winkeltreue einen *flächentreuen* Zylinderentwurf, führt die damit verbundene Forderung nach Inhaltsgleichheit der beiden Dreiecke

$$\frac{1}{2}\cos\beta \cdot \mathrm{d}\lambda \cdot \mathrm{d}\beta = \frac{1}{2}\mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}v$$

zur Differentialgleichung $\cos\beta \cdot \mathrm{d}\beta = \mathrm{d}v$ mit der offensichtlichen Lösung $v = \sin\beta + C$. Weil bei $\beta = 0$ auch $v = 0$ zutrifft, ist $C = 0$. Dies ist die sehr einfache *lambertsche Zylinderprojektion*, welche zwar alle Nationen zufrieden stellt, weil jede ihrer Größe nach aufscheint, aber sonst kaum von Interesse ist.

Wirklich interessant ist die in der Aufgabe formulierte Forderung nach einem *winkeltreuen* Zylinderentwurf, den nur mit diesem können Seefahrer den gewünschten Kurs ihres Schiffes auf hoher See fixieren. Die Forderung nach Winkeltreue führt, wenn man den Winkel bei $X$ bzw. bei $U$ betrachtet und dessen Tangens bildet, zur Gleichung

$$\mathrm{d}\beta : (\cos\beta \cdot \mathrm{d}\lambda) = \mathrm{d}v : \mathrm{d}u\,.$$

Dies führt unmittelbar zur Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta} = \mathrm{d}v$$

mit der allgemeinen Lösung

$$v = \int \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta} = \ln\tan\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C\,.$$

Weil bei $\beta = 0$ auch $v = 0$ zutrifft, ist $C = 0$. Das oben erwähnte und kunstvoll ermittelte Integral führt somit zur gesuchten Formel

$$v = \ln\tan\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

der winkeltreuen *Mercatorprojektion*.

Also lohnt es sich scheinbar doch, die Technik des Integrierens einigermaßen zu beherrschen (bzw. den Computer genügend intensiv mit Integralen zu malträtieren). Doch möglicherweise wird mit dieser Folgerung ein wenig vorschnell geschlossen:

Bedenken wir: Gerardus Mercator, der diese winkeltreue Erdkarte entwarf, lebte von 1512 bis 1594. Er kannte folglich noch keine Techniken des Integrierens, denn

[3] Genau genommen sind $Y$ und $Z$ auf der in $X$ gelegten *Tangentialebene der Kugel* und nur „in erster Näherung" (bei hinreichend kleinen Differentialen) Punkte der Kugel. In weiterer Folge gilt das gleich für die „Zylinderpunkte" $V$, $W$.

der gesamte Differentialkalkül wurde erst ein Jahrhundert später entdeckt. Wie kam er zu seiner Erdkarte?

Die Antwort beruht auf der geometrischen Deutung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta} = \mathrm{d}v \; .$$

Wir setzen $\lambda = \pi/2$ und $\mathrm{d}\lambda = 0$, betrachten also die Punkte $X = \{\pi/2 \mid \beta\}$ und $Z = \{\pi/2 \mid \beta + \mathrm{d}\beta\}$, die zusammen mit dem Kugelmittelpunkt $O$ in der $y$-$z$-Aufrißebene liegen. Schneidet man den von $O$ durch $Z$ führenden Strahl mit der durch $X$ verlaufenden Parallelen zur $z$-Achse in $S$, entpuppt sich die von $X$ zu $S$ reichende Strecke als jene, welche die Länge $\mathrm{d}v$ besitzt.

Wenn nun — mit dem Äquator beginnend — mit wachsendem $\beta$ ein ganzes Netz von Strahlen gezeichnet wird, welche von $O$ ausgehend durch $\{\pi/2 \mid \beta\}$ führen, und wenn das „Inkrement“ $\Delta\beta = \mathrm{d}\beta$ von einem Strahl zum nächsten hinreichend klein gewählt wird, erhält man mit einer unentwegten Aufeinanderfolge der oben beschriebenen Konstruktion von $\Delta v \approx \mathrm{d}v$ eine beliebig gute Näherung an die Mercatorkarte.

Auf den Punkt gebracht: Mercator konnte zwar noch nicht im Sinne von Newton und Leibniz integrieren, aber ihm gelang die *numerische Lösung einer Differentialgleichung*. Er hat, wenn man so will, daß Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta}$$

als Idee bereits vorweggenommen.

Dies nämlich ist die Quintessenz dessen, was das Integral in der Schule bedeuten sollte: *es repräsentiert in erster Linie eine Idee*: die raffinierteste und wirkungsvollste Idee der gesamten Mathematik.